MAI 1 – 5. cvičení „písemné" (náhradní za 19.3.2020)

I. část – opakování elementárních funkcí

Připomeneme si základní vlastnosti „jednodušších" funkcí (známých ze střední školy) a jejich „zviditelnění" pomocí grafů funkcí – zatím intuitivně, funkce a jejich vlastnosti zatím budeme považovat za známé (definice pak umožní důkazy těchto vlastností – například byly definovány na 4. přednášce pomocí nekonečných řad funkce e^x, $\sin x$, $\cos x$ a odtud lze dokázat to, co považujeme za zřejmé v tomto cvičení – bude později aspoň „něco")

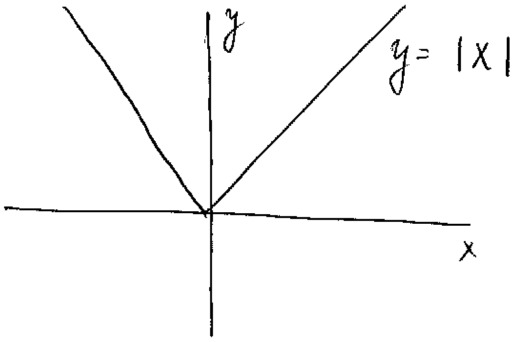
V tomto písemném cvičení budou řešení některých příkladů z „5. cvičení" (jako návody pro samocvičení – řešení příkladů a problémů zbývajících) – část I. Část II (limita funkce – úvod) bude „přidána" ke cvičení 6.

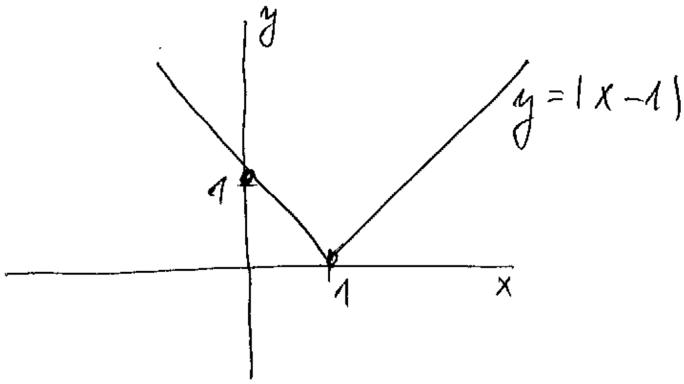
Příklady:

1. Máme načrtnout grafy funkcí, které jsou „příbuzné" s některou ze základních známých funkcí a také si připomenout, jak „získat" grafy, známe-li graf funkce $y=f(x)$, také funkcí $y=f(x)+c$, $y=f(x+c)$, $y=cf(x)$, $y=|f(x)|$ $(c\in\mathbb{R})$, a třeba i $y=|af(x+b)|+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ a podobně.

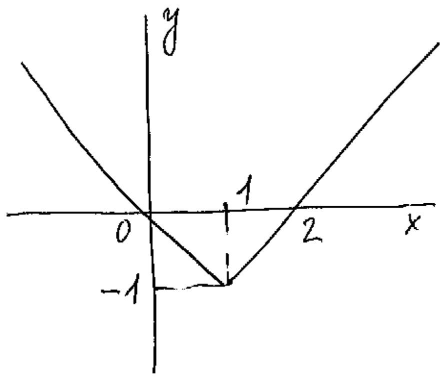
Dále budou asi trochu „neumělé" náčrtky – omlouvám se:

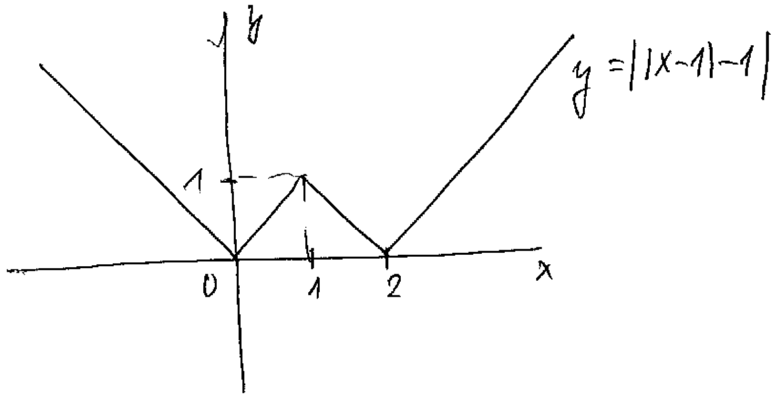
a) $f(x) = |x|$ („základní") $\longrightarrow$ $f(x) = |x-1|$





$\longrightarrow$ $f(x) = |x-1|-1$ $\longrightarrow$ $f(x) = \big||x-1|-1\big|$

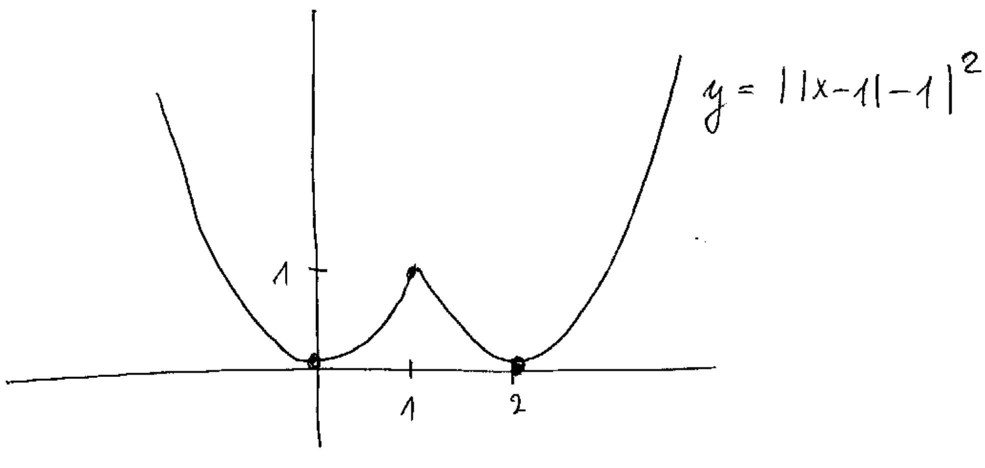




<u>ale graf fce $f(x) = \big||x-1|-1\big|^2$</u>

$$\big||x-1|-1\big|^2 = \left(|x-1|-1\right)^2 = \begin{cases} |x|^2 = x^2 & \text{pro } x \in (-\infty, 1) \\ |x-2|^2 = (x-2)^2 & \text{pro } x \in \langle 1, +\infty) \end{cases}$$

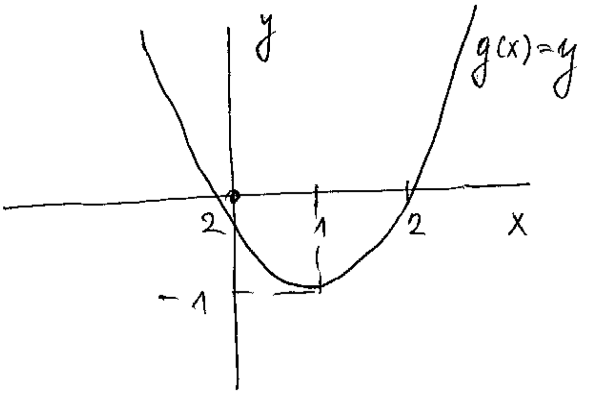
(a grafy fcí $y = x^2$ i $y = (x-2)^2$ jsou paraboly)

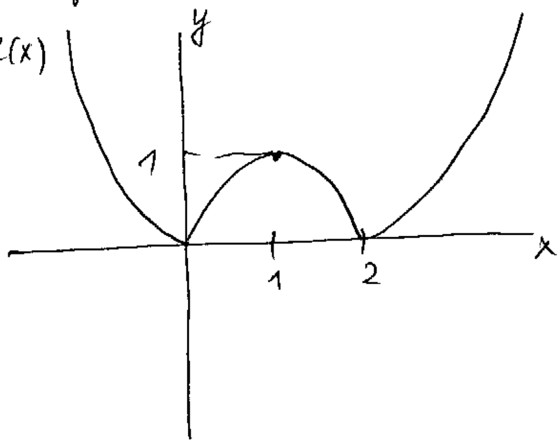


(Definiční obory všech funkcí v a) jsou R)

a nakonec $f(x) = \big| |x-1|^2 - 1 \big|$:

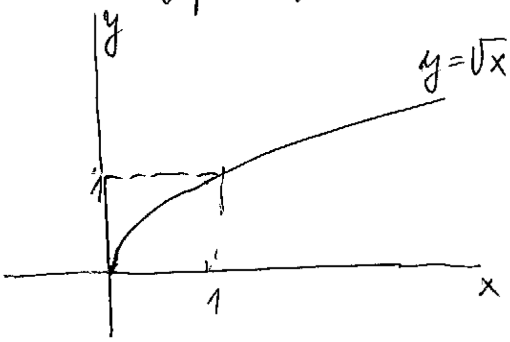
nejprve $g(x) = (x-1)^2 - 1$ $(= x^2 - 2x)$ $\longrightarrow$ $f(x) = \big| |x-1|^2 - 1 \big|$



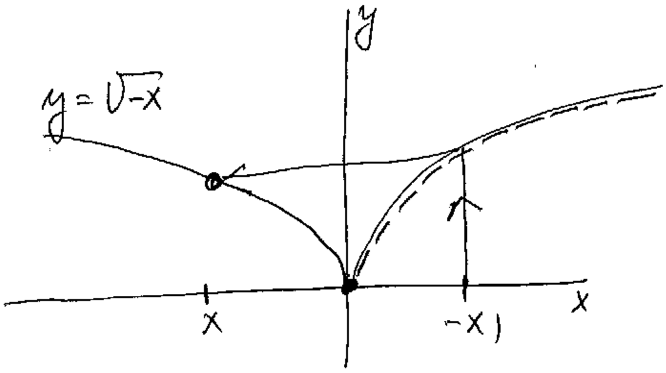


b) $f(x) = \sqrt{x}$ (základní)

$D_f = \langle 0, +\infty)$

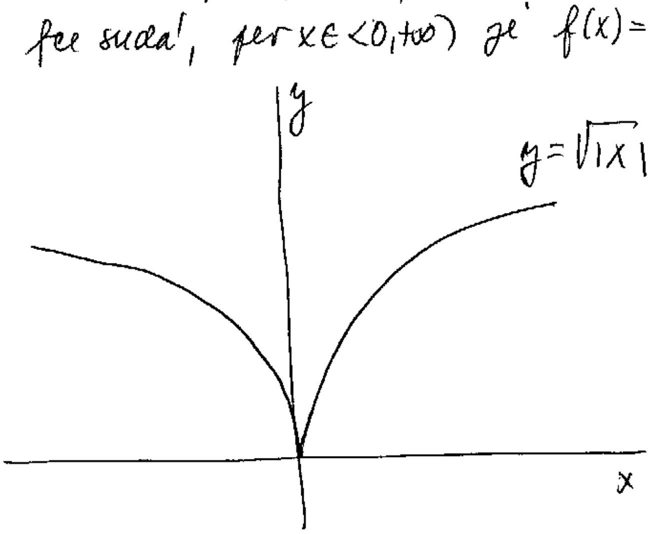


$f(x) = \sqrt{-x}$, $D_f = (-\infty, 0\rangle$

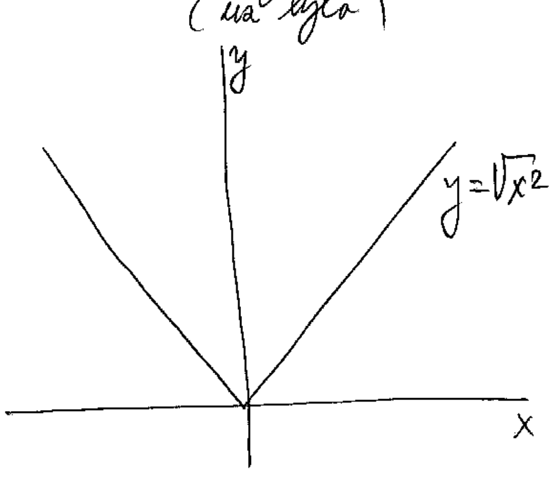


(pro $x \in (-\infty, 0\rangle$ je $-x \in \langle 0, +\infty)$ a použiji graf $\sqrt{x}$)

$f(x) = \sqrt{|x|}$, $D_f = R$,
fce sudá, pro $x \in \langle 0, +\infty)$ je $f(x) = \sqrt{x}$

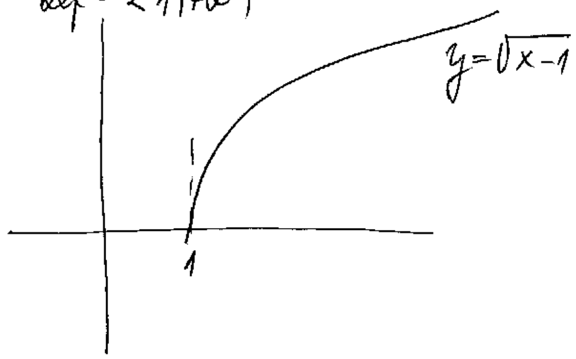


$f(x) = \sqrt{x^2}$ $(= |x|)$!
(už bylo)



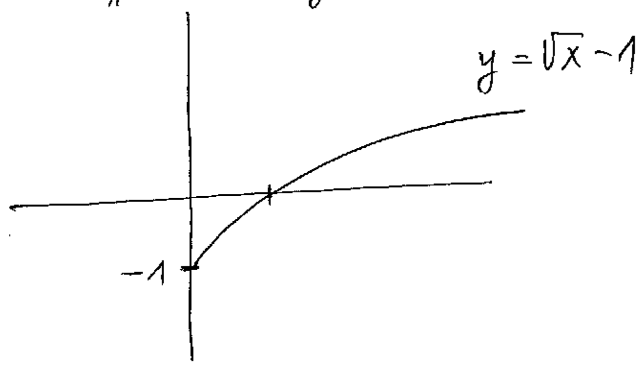
$f(x) = \sqrt{x-1}$ („posunutí" grafu „$\sqrt{x}$ o „1" doprava)

$D_f = \langle 1, +\infty)$



$f(x) = \sqrt{x} - 1$, $D_f = \langle 0, +\infty)$

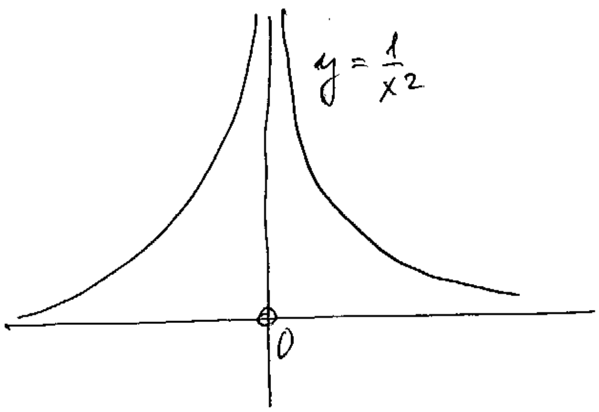
(posunutí grafu $\sqrt{x}$ o $+1$ „dolů" (tj.

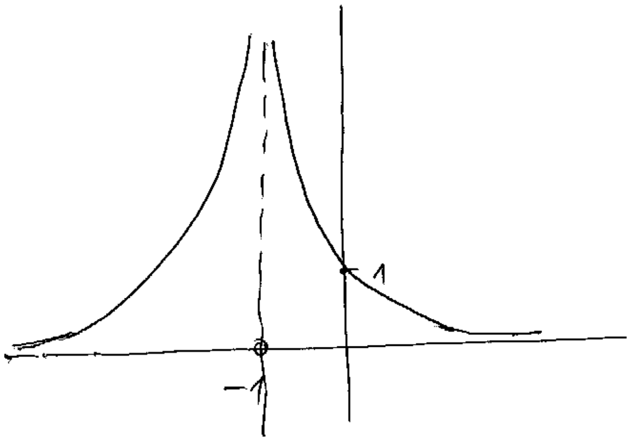


c) zkuste „sami"

d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $D_f = R \setminus \{0\}$ $\longrightarrow$ $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$, $D_f = R \setminus \{-1\}$

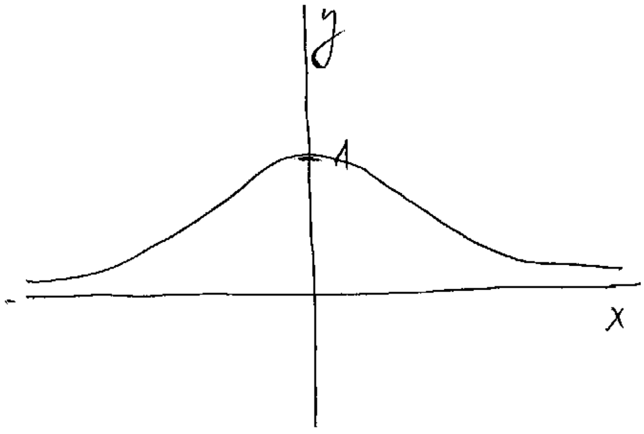
(je sudá, $f(x) > 0$) („posunutí o „1" doleva po ose x)





ale $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ má $D_f = R$! – asi nelze zde použít graf $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (jako u předchozí funkce)

ale f je sudá, pro $x \geq 0$ je f klesající ($g(x) = x^2+1$ je rostoucí, kladná, pak $\frac{1}{x^2+1}$ je klesající v $\langle 0, +\infty)$)

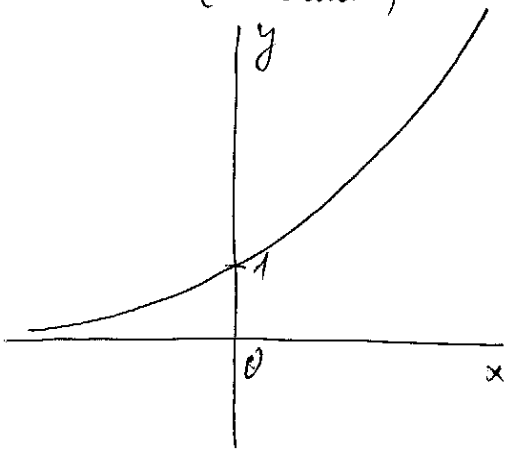


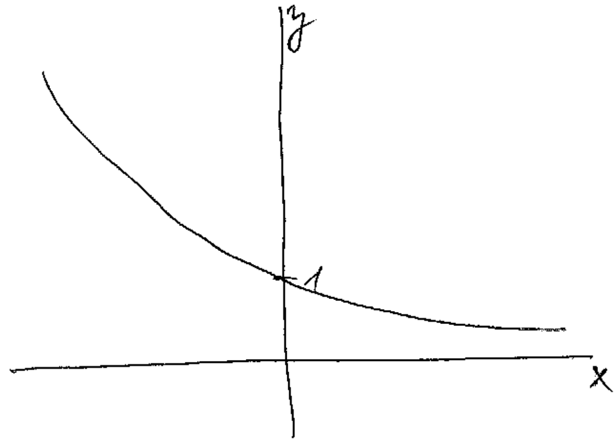
← a pro $x \to +\infty$ (limity ještě budeme cvičit) určíme

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2+1} = „\frac{1}{\infty}" \underset{AL}{=} 0$$

← „asi" f kdo už umí „derivovat a aplikovat derivaci, tak „asi" řeší)

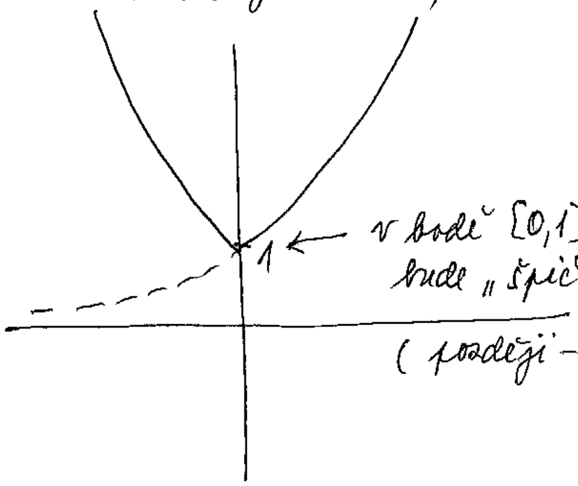
1 e) $f(x)=e^{x}$, $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$ (základní) $\longrightarrow$ $f(x)=e^{-x}$, $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$



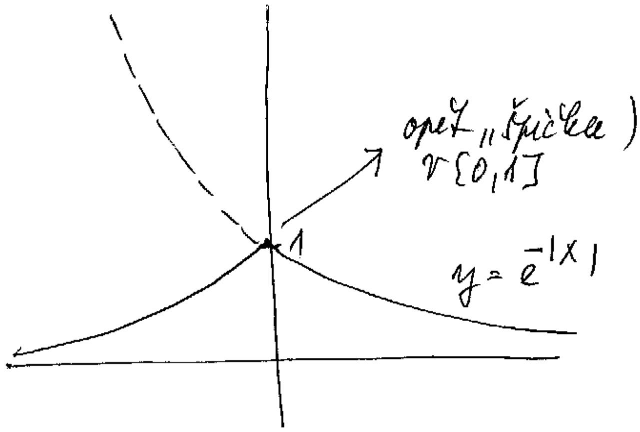


$f(x)=e^{|x|}$, $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$ a $f(x)=e^{-|x|}$, $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$

(a $f(x)=e^{x}$ pro $x\geq 0$, navíc je sudá) (a pro $x\geq 0$ je $f(x)=e^{-x}$)



(později – u derivací)



a $f(x)=e^{-x^2}$ („důležitá" funkce)

– $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$, opět „sudá", $e^{-x^2}\leq 1$ $(-x^2\leq 0)$

(a podobně jako u fce $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$)

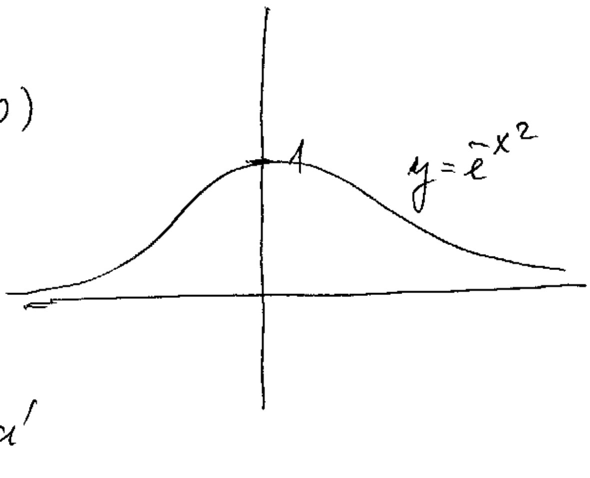
pro $x\geq 0$: e^{-x^2} je funkce složená –

– e^{y} je rostoucí, $y=-x^2$ je klesající

pro $x\geq 0$, tedy $f(x)=e^{-x^2}$ je klesající

a pro $x\to\infty$ je $\lim(-x^2)=-\infty$,

a „z grafu" fce $\exp x$ – $\lim\limits_{y\to-\infty} e^{y}=0$, $f(0)=e^{0}=1$

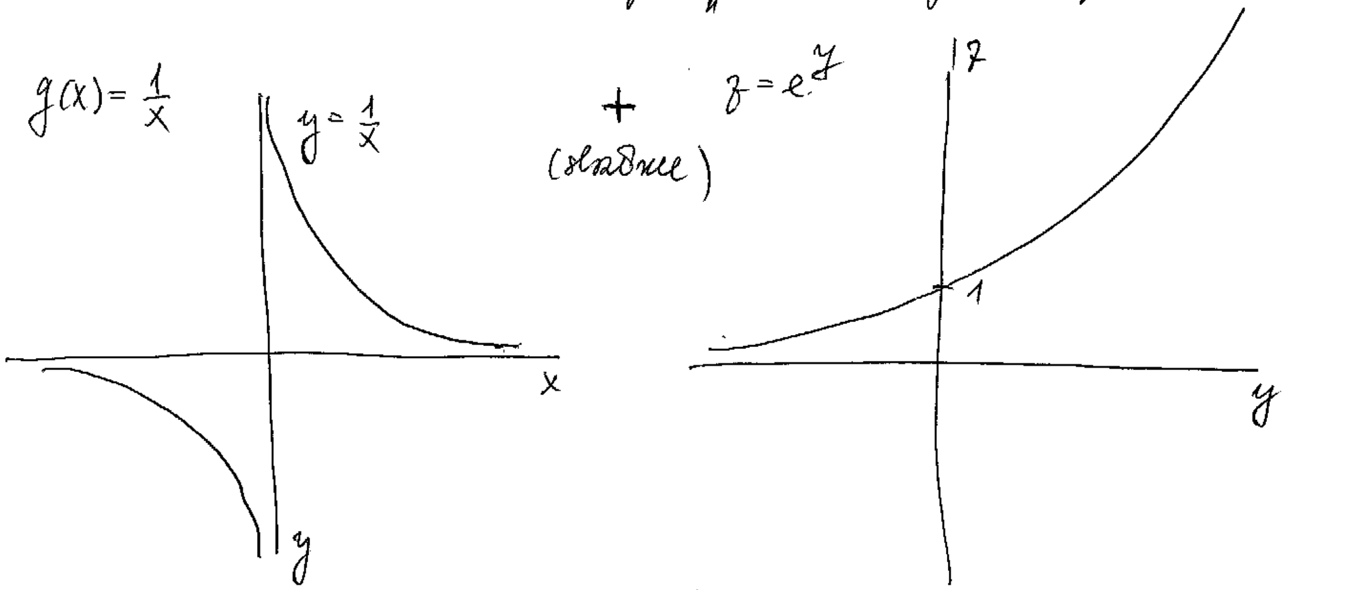


<u>$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ – trochu těžší příklad</u> grafu fce, složené z exponenciely (funkce vnější) a $g(x)=\frac{1}{x}$ (vnitřní fce),

tj. $f(x)=e^{g(x)}$: $D_f = R\setminus\{0\} = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$f(x)>0$

a zkusme graf odhadnout (bez použití diferenciálního počtu zatím – bude později) „skládáním" grafů fce



pro $x\in(0,+\infty)$ je $\frac{1}{x}>0 \Rightarrow e^{\frac{1}{x}}>1$

$x\in(-\infty,0)$ je $\frac{1}{x}<0 \Rightarrow 0<e^{\frac{1}{x}}<1$

$g(x)=\frac{1}{x}$ je klesající v $(-\infty,0)$ i v $(0,+\infty)$, e^{y} je rostoucí v R $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ proto $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ je klesající v $(-\infty,0)$ i v $(0,+\infty)$

a pro $x\to 0+$ je $\frac{1}{x}\to+\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$

$x\to 0-$ je $\frac{1}{x}\to-\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x}}\to 0$

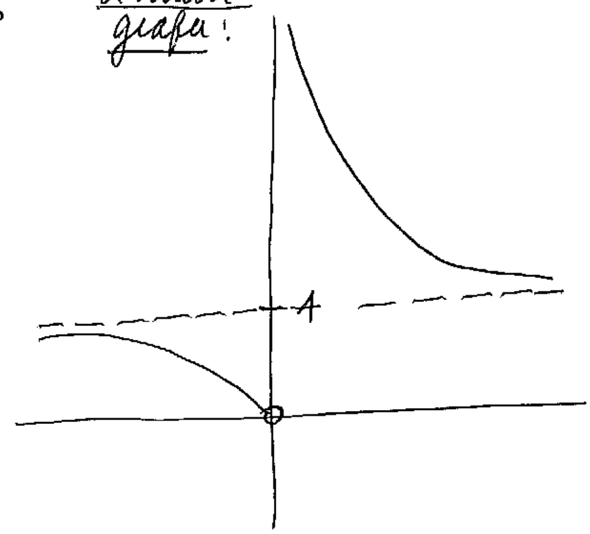
<u>a odhad grafu:</u>

pro $x\to\pm\infty$ $\frac{1}{x}\to 0$ a

tedy $e^{\frac{1}{x}}\to 1$

(tj. „pořádně" $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$)

$e^{\frac{1}{x}}\neq 1$ neboť $\frac{1}{x}\neq 0$

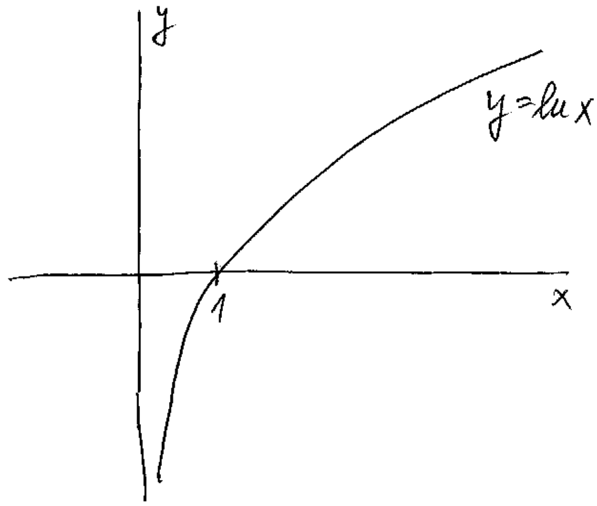


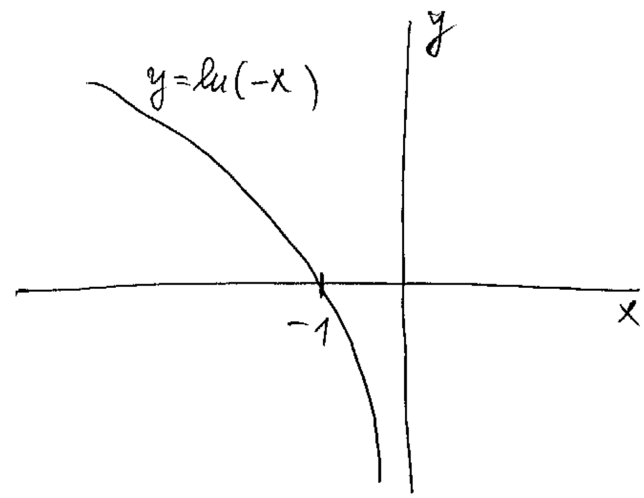
g) Grafické funkce $f(x) = \ln x$

$D_f = (0, +\infty)$ – základní

$\rightarrow$ $f(x) = \ln(-x)$ – $D_f = (-\infty, 0)$

(a analogicky jako u grafu $\sqrt{-x}$)



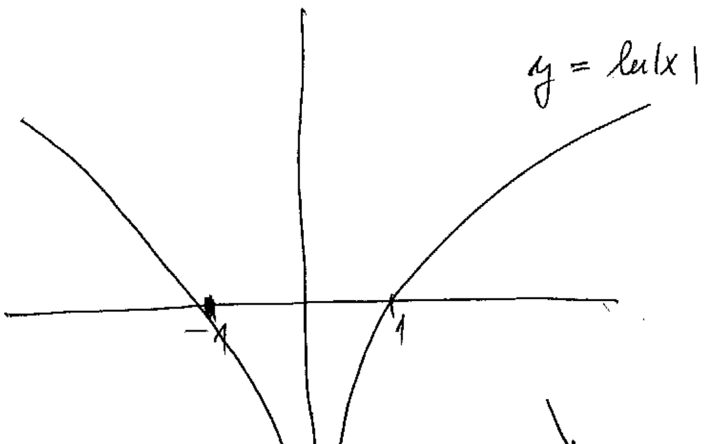


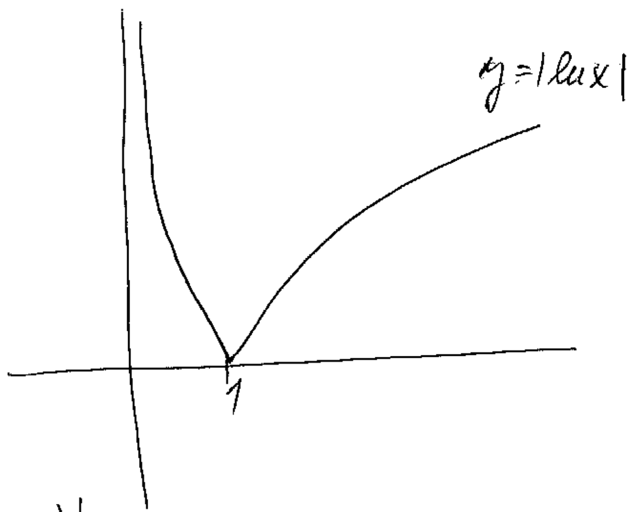
$f(x) = \ln|x|$ – $D_f = R \setminus \{0\}$

fce sudá, pro $x \in (0, +\infty)$ je

$\ln|x| = \ln x$

$f(x) = |\ln x|$, $D_f = (0, +\infty)$





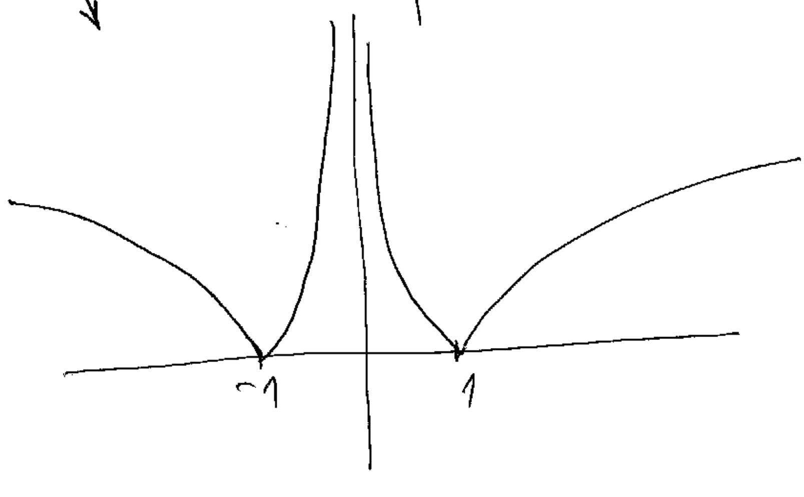
a $f(x) = |\ln|x||$

$D_f = R \setminus \{0\}$

(fce sudá – opět

a pro $x \in (0, +\infty)$ je

$f(x) = |\ln|x|| = |\ln x|$



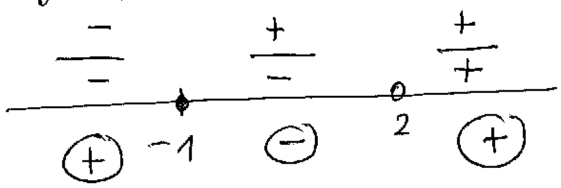
2. Definiční obory funkcí (složených z elementárních „známých" funkcí) – pozor na zlomky, sudé odmocniny, a zatím jistě na $\ln x$

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$

$$\mathcal{D}f = \left\{ x \in \mathbb{R};\ x-2 \neq 0 \ \wedge\ \frac{x+1}{x-2} \geq 0 \right\} = (-\infty, -1\rangle \cup (2, +\infty)$$

„Musíme" tedy řešit nerovnici $\dfrac{x+1}{x-2} \geq 0$:

Asi jednodušše takto: zlomek $\dfrac{x+1}{x-2}$ nemění znaménko jen v bodech, kde se anuluje čitatel, resp. jmenovatel (lineární fce) tj. pro $x=-1$ a $x=2$ ($\notin \mathcal{D}f$) – naznačme třeba:



$\Rightarrow$ $\mathcal{D}f = (-\infty, -1\rangle \cup (2, +\infty)$

podobně v b): def. obor funkce $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{3-x}\right)$:

$$\mathcal{D}f = \left\{ x \in \mathbb{R};\ 3-x \neq 0 \ \text{a}\ \frac{1+x}{3-x} > 0 \right\} = (-1, 3)$$

nebo def. obor funkce $f(x) = \ln(\ln x - 1)$:

$$\mathcal{D}f = \{ x \in (0, +\infty);\ \ln x - 1 > 0 \} = (e, +\infty)$$

$\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1$ a z vlastností fce $\ln x$: $\ln x > 1 \Leftrightarrow x \in (e, +\infty)$

($\ln e = 1$, a $\ln x$ je fce rostoucí v $(0, +\infty)$)

Podobně: $f(x) = \ln(\ln(x-1))$! $\mathcal{D}f = \{ x;\ x-1 > 0 \ \text{a}\ \ln(x-1) > 0 \} = (2, +\infty)$

$\ln(x-1) > 0$ pro $x-1 > 1$

<u>Ad c)</u> $f(x) = \ln(\sin x)$;

$$\mathcal{D}f = \{x \in \mathbb{R};\ \sin x > 0\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} (\,2k\pi, (2k+1)\pi\,)$$

3. <u>Opakování „vlastností" funkcí</u> ;

a) (ii), (iii), (iv) – viz přednáška 4.

a k (i): <u>f je lichá funkce</u>, když (1) $x \in \mathcal{D}f \Rightarrow -x \in \mathcal{D}f$
(2) $\forall x \in \mathcal{D}f : f(-x) = -f(x)$

<u>f je sudá funkce</u>, když (1) $x \in \mathcal{D}f \Rightarrow -x \in \mathcal{D}f$
(2) $\forall x \in \mathcal{D}f : f(-x) = f(x)$

(užitečné při „vyšetřování" funkcí – stačí „umět" pro „polovinu" definičního oboru fce f)

Příklady – <u>liché funkce</u> – všechny liché mocniny, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$
<u>sudé funkce</u> – všechny sudé mocniny, $\cos x$
také jsme využili sudosti, resp. lichosti fce v příkladu 1) (grafy funkcí)

b) <u>Máme ukázat (pomocí definice), že funkce $f(x) = x^2$ je rostoucí na intervalu $\langle 0, +\infty)$ a klesající na $(-\infty, 0\rangle$:</u>

v $\langle 0, +\infty)$ máme ukázat, že platí:

<u>$x_1, x_2 \in \langle 0, +\infty),\ x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$:</u>

Dk: nechť $0 \le x_1 < x_2$; pak, vynásobíme-li nerovnost číslem x_1,

dostáváme ($x_1 > 0$) : $x_1^2 < x_1 x_2$
a pak $x_2 > 0$: $x_1 x_2 < x_2^2$

$\Rightarrow x_1^2 < x_1 \cdot x_2 < x_2^2$, (cbd.)
(tranzitivnost uspořádání)

analogicky: ? v $(-\infty,0\rangle$ je $f(x)=x^2$ klesající, tj.
$$\underline{x_1,x_2\in(-\infty,0\rangle,\quad x_1<x_2\ \Rightarrow\ x_1^2>x_2^2}$$

vezmeme opět $\quad x_1<x_2<0 \quad \big|\cdot x_1<0$ a $\cdot x_2<0$

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 &> x_1x_2 \\ x_1x_2 &> x_2^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1^2>x_2^2 \text{ (cbd)}$$

c) • $\underline{g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}}$ – na' jsme „zkoušeli" úspěšně nerovnosti (kvůli grafu) v příkladu 1)

a „pořádně": $\quad x\in\langle 0,+\infty) \Rightarrow$ pak $\left.\begin{array}{l} h(x)=x^2+1 \text{ je rostoucí} \\ \text{a } h(x)>0 \end{array}\right\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+1} \text{ je klesající v } \langle 0,+\infty):$$

neboť: v $\langle 0,\infty)$ je x^2 rostoucí, tj.
$$0<x_1<x_2 \Rightarrow x_1^2<x_2^2 \quad \big|+1$$
$$0<x_1^2+1<x_2^2+1 \quad \Rightarrow \frac{1}{x_1^2+1}>\frac{1}{x_2^2+1} \text{ cbd.}$$

(analogicky lze ukázat, že v $(-\infty,0\rangle$ je $g(x)$ rostoucí – x^2 je klesající $\Rightarrow$ x^2+1 je klesající, tj.
$$x_1<x_2<0 \Rightarrow x_1^2+1>x_2^2+1>0 \Rightarrow \frac{1}{x_1^2+1}<\frac{1}{x_2^2+1} \text{ cbd.})$$

• podobně lze ukázat, že $\underline{f(x)=e^{-x^2}}$ je rostoucí v $(-\infty,0\rangle$ a klesající v $\langle 0,+\infty)$

• $\underline{f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}}$ $(=\sinh x)$ je rostoucí v R – neboť:

e^x je rostoucí v R; e^{-x} klesající v R, tedy $-e^{-x}$ rostoucí ($e^x>0$); pak e^x-e^{-x} je rostoucí funkce a tedy i $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ je rostoucí (aniž jsme „pořádně" napsal)

Trochu „těžší" vyšetření funkce $f(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ $(=\cosh x)$

$\cosh x$ je funkce def. v R, sudá – stačí ukázat, že f je rostoucí v $\langle 0,+\infty)$, pak (díky sudosti) je klesající v $(-\infty,0\rangle$; neboť:

platí-li, že pro $0<x_1<x_2$ je $f(x_1)<f(x_2)$, pak, je-li $x_1<x_2<0 \Rightarrow -x_1>-x_2>0$

a $f(x_1)=f(-x_1)>f(-x_2)=f(x_2)$ (cbd.)

A teď musíme ukázat, že platí:

$$0<x_1<x_2 \Rightarrow \frac{e^{x_1}+e^{-x_1}}{2}<\frac{e^{x_2}+e^{-x_2}}{2}$$

stačí ukázat, že $e^{x_1}+\frac{1}{e^{x_1}}<e^{x_2}+\frac{1}{e^{x_2}}$?

$$\left(\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{e^{x_1}\cdot e^{x_2}}=\right)\frac{1}{e^{x_1}}-\frac{1}{e^{x_2}}<e^{x_2}-e^{x_1}$$

tj. (lze „krátit" $e^{x_2}-e^{x_1}>0$) $1<e^{x_1}\cdot e^{x_2}$ – což platí, neboť pro $x>0$ je $e^{x}\geqq 1$)

A „problémy":

d) f je lichá fce, $0\in Df \Rightarrow f(0)=0$

f je lichá $\equiv$ $x\in Df \Rightarrow -x\in Df$ a $f(-x)=-f(x)$, tedy pro $x=0\in Df$ je $f(0)=f(-0)=-f(0)$ $(\Rightarrow 2f(0)=0)\Rightarrow f(0)=0$

e) Máme-li složenou fci $f(g(x))$,

$g(x)$ je def. v (α,β), $g(\alpha,\beta)\subset(a,b)$, f je def. v (a,b), pak zřejmě platí: ($g\nearrow$ (resp $\searrow$) bude „značení" pro: $g(x)$ je rostoucí v (α,β), resp. $g(x)$ je klesající)

(i) $g \nearrow$ v (α,β), $f \nearrow$ v (a,b) $\Rightarrow$ $f(g(x)) \nearrow$ v (α,β)

(ii) $g \nearrow$ v (α,β), $f \searrow$ v (a,b) $\Rightarrow$ $f(g(x)) \searrow$ v (α,β)

(iii) $g \searrow$ v (α,β), $f \nearrow$ v (a,b) $\Rightarrow$ $f(g(x)) \searrow$ v (α,β)

(iv) $g \searrow$ v (α,β), $f \searrow$ v (a,b) $\Rightarrow$ $f(g(x)) \nearrow$ v (α,β)

(„podobné jako" ($+1 \nearrow$, $-1 \searrow$) $1\cdot 1 = 1$, $1\cdot(-1) = -1$, $(-1)\cdot(-1) = 1$)

Důkaz (např. pro ii, ostatní případy podobné)

víme, že platí: $x_1, x_2 \in (\alpha,\beta)$, $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$ (1)

$y_1, y_2 \in (a,b)$, $y_1 < y_2 \Rightarrow f(y_1) > f(y_2)$ (2)

vezmeme $x_1, x_2 \in (\alpha,\beta)$, $x_1 < x_2 \underset{(1)}{\Longrightarrow} g(x_1) < g(x_2) \underset{(2)}{\Longrightarrow} f(g(x_1)) > f(g(x_2))$

$y_1 = g(x_1)$, $y_2 = g(x_2)$ $\in (a,b)$

Analogická tvrzení jsou i pro fce nerostoucí, resp. neklesající.
(Užitečné při vyšetřování funkce)

4. Inverzní funkce

Základní definice: (spec. „verze" pro $\mathcal{D}f = (a,b)$, $\mathcal{H}f = (\alpha,\beta)$)

f je prostá v (a,b), $f(a,b) = (\alpha,\beta)$ – pak ke každému $y \in (\alpha,\beta)$ existuje jediné $x \in (a,b)$ tak, že $f(x) = y$; toto x označujeme: $x = f^{\langle -1 \rangle}(y)$ a tedy

$$f(x) = y \iff x = f^{\langle -1 \rangle}(y)$$

Poznámky: 1) když chceme nezávisle proměnnou i u $f^{\langle -1 \rangle}$ značit x (jistě i dříve na střední škole), takže zpravidla je psáno:

$$f^{\langle -1 \rangle}(x) = y \iff x = f(y), \quad \begin{array}{l} x \in (\alpha, \beta) \\ y \in (a, b) \end{array}$$

2) najít inverzní funkci znamená „vlastně" (v případě prosté funkce f) řešit rovnici

$$f(x) = y \text{ pro dané } y \in \mathcal{H}f$$

(a pak „vyměnit" $x \leftrightarrow y$)

(inverzní funkce jsou tedy kromě jiného užitečné pro zápis řešení rovnic)

a) $f \nearrow$ (resp. $\searrow$) na intervalu (a,b) $\Rightarrow$ f je prostá na (a,b)

$$f \nearrow \text{ v } (a,b) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \forall x_1, x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

tedy, je-li $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 \neq x_2$, pak buď $x_1 < x_2$ a $f(x_1) < f(x_2)$ nebo $x_1 > x_2$ a pak $f(x_1) > f(x_2)$, tedy $f(x_1) \neq f(x_2)$

(analog. pro funkci klesající v (a,b))

b) inverzní funkce k funkci $f(x) = x^2$ na intervalu $(-\infty, 0\rangle$:

$f(x) = x^2$ je na $(-\infty, 0\rangle$ klesající, tedy prostá, zobrazuje $(-\infty, 0\rangle$ na interval $\langle 0, +\infty)$, tedy zde má f funkci inverzní;

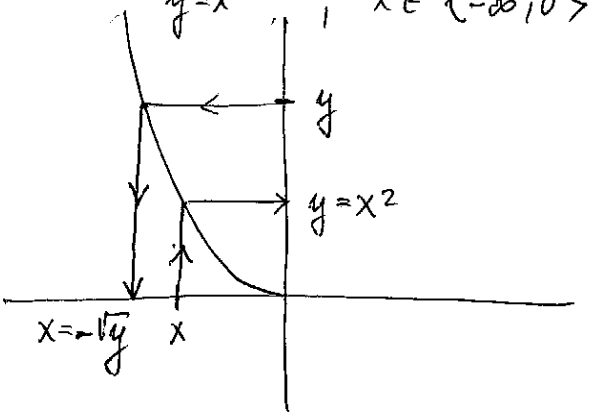
je-li $x^2 = y$, existuje jediné $x \in (-\infty, 0\rangle$ tak, že $x^2 = y$,

a to $x = -\sqrt{y}$ („$\sqrt{\ }$ je inverzní k x^2 na $\langle 0, +\infty)$")

a $x \leftrightarrow y$: $\quad f^{\langle -1 \rangle}(x) = -\sqrt{x}, \quad x \in \langle 0, +\infty)$

Poznámka (a připomenutí) o grafu $f^{\langle -1 \rangle}$:

$y = x^2$, $x \in (-\infty, 0\rangle$



kdybychom „nedělali" při def. $f^{\langle -1 \rangle}$

$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$

$x \in (a,b)$ $\qquad y \in (\alpha,\beta)$

proměnnou y jako proměnnou inverzní funkce, graf „zůstává", při výměně $y \leftrightarrow x$ vlastně u grafu $f^{\langle -1 \rangle}$ „měníme" osy x, y (pomocí osové souměrnosti dle osy $y = x$ 1. a 3. kvadrantu, tedy proto se „učí", že graf $f^{\langle -1 \rangle}$ je „souměrný" s grafem f „dle přímky" $y = x$)

(ii) $f(x) = x^2+2x+2$ – „po inverzní funkci" hledáme

pro dané $y \in ?$ x tak, aby $x^2+2x+2 = y$

(a x – jediné řešení), tj. řešíme rovnici (kvadr. s parametrem)

$$x^2 + 2x + (2-y) = 0 \quad \text{, tj. lze upravit na}$$

$$(x+1)^2 + 1 - y = 0 \iff (x+1)^2 = y-1$$

tedy 1) řešení je pro $y \geq 1$ ($= \mathcal{H}f$) a

2) pro $x \geq -1$ je $x+1 = \sqrt{y-1}$, tj. $x = -1 + \sqrt{y-1}$

$y \in \langle 1, +\infty)$

a pro $x \leq -1$ je $x+1 = -\sqrt{y-1}$, tj. $x = -1 - \sqrt{y-1}$

tj. v obvyklém „značení":

Inverzní funkce k f existují na intervalech

$\langle -1,+\infty)$, zde je $f_{(1)}^{\langle -1\rangle}(x) = -1+\sqrt{x-1}$, $x\in\langle 1,+\infty)$

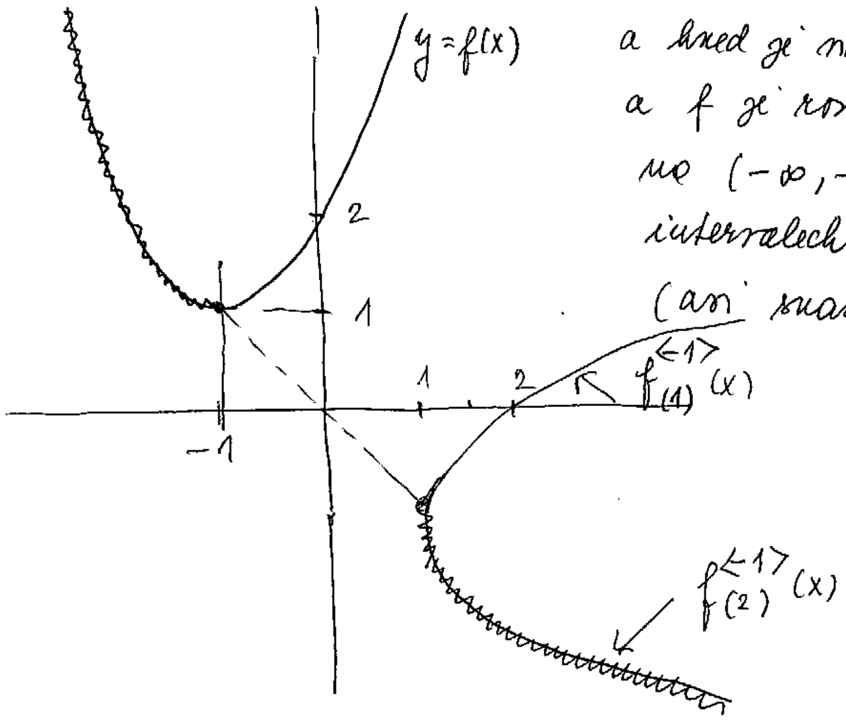
a $(-\infty,-1\rangle$, zde je $f_{(2)}^{\langle -1\rangle}(x) = -1-\sqrt{x-1}$, $x\in\langle 1,+\infty)$

Poznámka: zde jsem záměrně nevyužívala graf fce $f(x)$ (odkud je vše snadno vidět), abychom si procvičili hledání inverzní funkce, i když nic „nevidíme".

S grafem: $f(x)=x^2+2x+2$ lze vyjádřit: $f(x)=(x+1)^2+1$, (*)

tj. graf je „posunutá" parabola grafu $y=x^2$,

a hned je vidět z (*), že $\mathcal{H}f=\langle 1,+\infty)$ a f je rostoucí na $\langle -1,+\infty)$, klesající na $(-\infty,-1\rangle$ a tak v těchto intervalech f „má" funkci inverzní (asi snazší, když to takto „jde")



(iv) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ (= sinh x), $g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ (= cosh x) (zajímavé a někdy i užitečné)

Platí: $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$ (proto se fce nazývají hyperbolický sinus a cosinus)

$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ je rostoucí v R (viz př. 3c), tedy k ní existuje inverzní funkce v R: a opět, hledáme $x \in R$ tak, aby $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = y$ (a $y \in ?$, uvidíme)

tedy řešíme rovnice: $e^x - \dfrac{1}{e^x} = 2y$, a tedy řešíme

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \quad \text{– kvadratická v „}e^x\text{"}$$

položme $e^x = t$: $\quad t^2 - 2yt - 1 = 0 \iff t_{1/2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$

ale „bereme" jen $t>0$ $(t = e^x)$, tj.: $t = y + \sqrt{y^2+1}$, $y \in R$

a pak tedy : $\quad e^x = y + \sqrt{y^2+1}$

$$\underline{x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right),\ y \in R}$$

Tedy po výměně $x \leftrightarrow y$:

k $f(x) = \sinh x$ existuje inverzní fce v R, a je

$$\underline{f^{\langle -1\rangle}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),\ x \in R}$$

(odtud plyne i to, že $\mathcal{H}(\sinh) = R$)

Analogicky najdete i inverzní fce k $f(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ v max. intervalech $\langle 0, +\infty)$, resp. $(-\infty, 0\rangle$ – alespoň jako „samoověření", třeba i $f^{\langle -1\rangle}$ pro $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$ nebo nějaké „vaše" funkce.

4c) (i) <u>fce inverzní k fci $f(x)=\sin x$ na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ -</u>

- „arkussinus" - ($\arcsin x = y$)

fce sin je na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ rostoucí, tedy prostá, a zobrazuje interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ na interval $\langle -1, 1\rangle$; tedy na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ existuje k fci sin inverzní - arcsin :

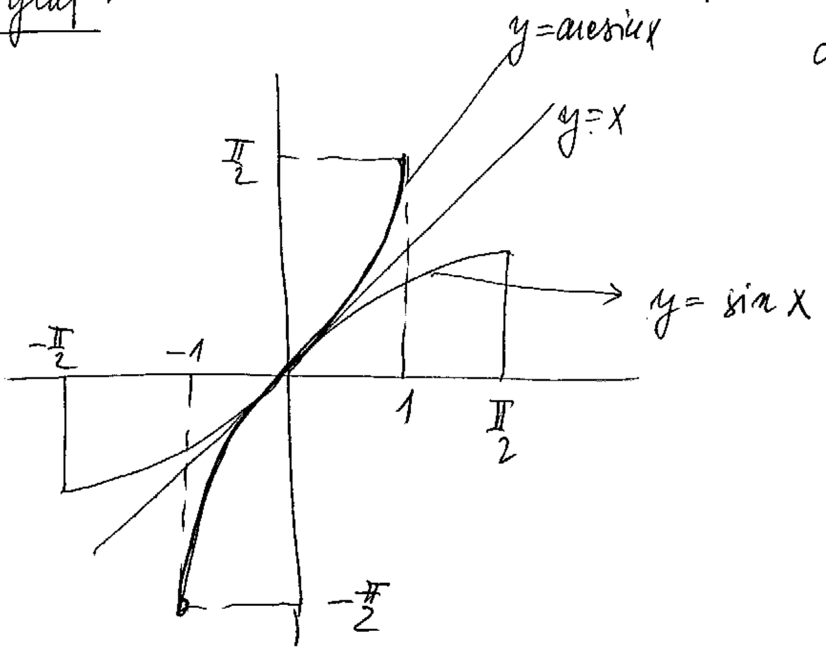
$$\sin x = y \iff x = \arcsin y$$
$$x \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\rangle, \qquad y \in \langle -1, 1\rangle$$

(a po výměně $x \leftrightarrow y$: $y = \arcsin x$

Fce $\arcsin x$ je def. v $\langle -1,1\rangle$, $\mathcal{H}(\arcsin) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$, je lichá a rostoucí na $\langle -1,1\rangle$; $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

a např. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin 0 = 0$, atd.

<u>graf:</u>



a dále : fce $\arcsin x$ je spojitá v $\langle -1,1\rangle$ (viz věta" - spojitost a přednášky č. 5)

<u>Lze obecně ukázat, že platí:</u> (je „vidět")

f je spojitá a prostá v (a,b), $f(a,b) = (\alpha, \beta) \Rightarrow \overset{\langle -1\rangle}{f}$ je spojitá v (α, β))

(ii) inverzní fce k fci $f(x) = \operatorname{tg} x$ na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(analogicky k (i))

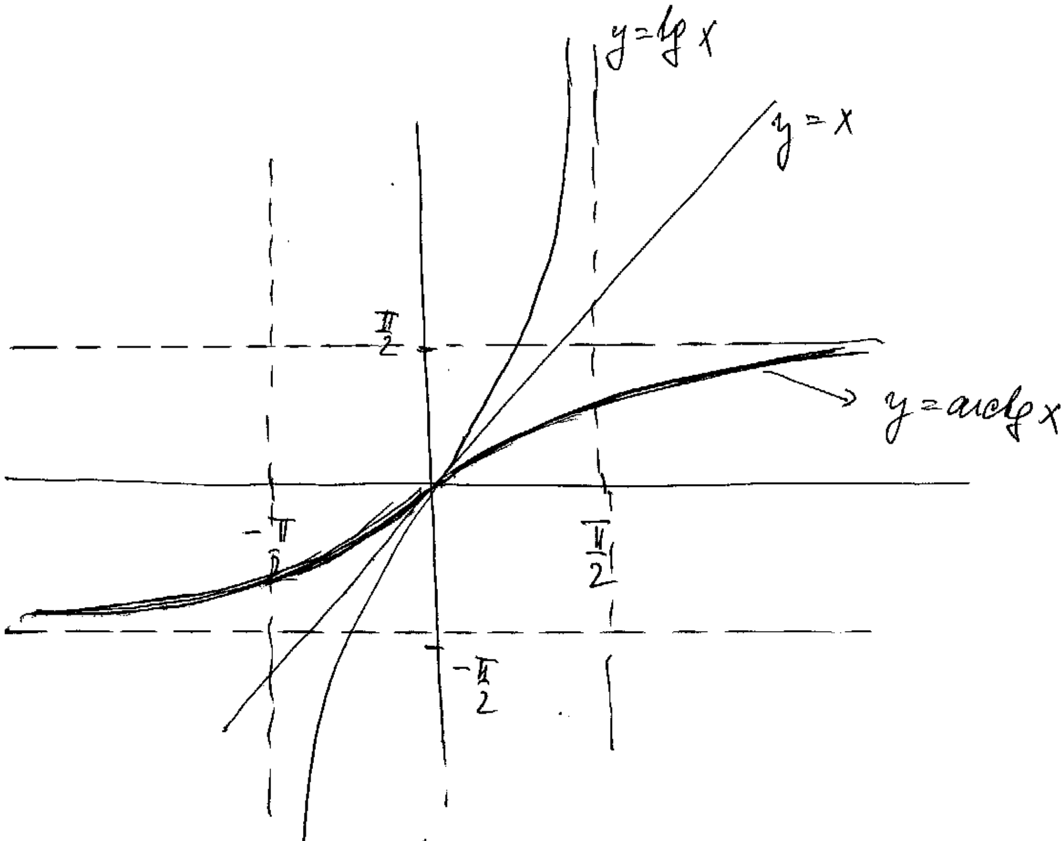
fce tg je rostoucí na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, zobrazuje interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ na R, tedy k této funkci existuje na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ inverzní funkce, zvaná arctg (arkustangens):

$$\underbrace{\operatorname{arctg} x = y}_{x \in R} \iff \underbrace{\operatorname{tg} y = x}_{y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}$$ (už zde výměna $x \leftrightarrow y$)

arctg x je fce rostoucí, lichá, spojitá v R, a

$\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$ (pro další „cvičení")

Graf:



(Pozn.: fce arctg x je užitečná "zvláště" v integrálním počtu)
navíc – je to příklad prostého zobrazení R na omezený interval)